Zahlenfolgen

Teil 3: Reihen

Arithmetische Reihen

Geometrische Reihen

Theorie und Musterbeispiele

Es wird auch das Arbeiten mit dem Summenzeichen $\sum$ geübt!

Datei Nr. 40050

Stand 2. November 2018

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

https://mathe-cd.de

Vorwort

Hier die wichtigen Texte über Folgen und Reihen:

40011 **Einführung**

Rekursive und explizite Berechnungsformeln

Grundlagen zu arithmetischen und geometrischen Folgen
(Dies wird in vorliegendem Text wiederholt!

Geometrische Folgen als Wachstumsfolgen (kurze Einführung)

40012 **Arithmetische und Geometrische Folgen**

40013 **Arithmetische Folgen 2. Ordnung**
Dies wurde auch schon in 40011 angesprochen

40019 **Geometrische Folgen: Prozentuales Wachstum**

Prozentuales (exponentielles) Wachstum und Abnahme (wie Zinseszinsrechnung, radioaktiver Zerfall).
Hier wird noch einmal besprochen, was kurz in 40011 gezeigt worden ist.
Wer es also ausführlicher braucht, lese hier nach!

40020 **Spezielle Wachstumsfolgen**

Hier geht es um die rekursive Formel $u_n = u_{n-1} \cdot q + r$.
und die explizite Berechnung der Formeln.

Zu den Anwendungen gehören auch schwierigere finanzmathematische Vorgänge wie Ratensparen, Rentenzahlung, Darlehensfinanzierung.

Allgemein beschreiben diese Folgen das beschränkte Wachstum.
Dazu gehört auch die beschränkte Abnahme (Abkühlungsvorgänge u.a.)

40050 **Arithmetische und geometrische Reihen (dieser Text)**

40060 **Geometrische Figuren als geometrische Folgen**
Es kommen auch Teilaufgaben zu Reihen vor.

40070 **Fibonacci-Folgen, Goldener Schnitt**

41000 **Bruchreihen**

40200 **Aufgabensammlung zu ar./geom. Folgen und Reihen**

usw.

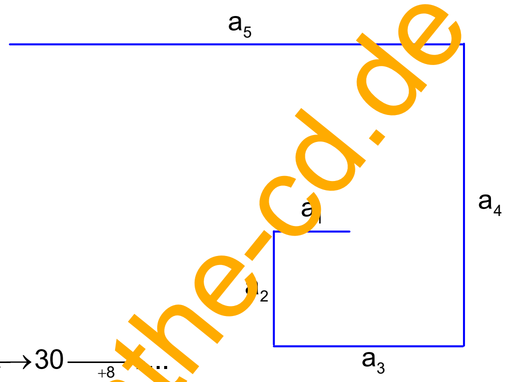
Inhalt

Trainingsaufgaben dazu in der Datei 40200

1 Aus Folgen werden Reihen - Einführung

Einführungsbeispiel

Gegeben ist eine Zahlenfolge, etwa diese: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 8$, $a_5 = 12$, …
Darunter kann man sich etwa vorstellen, dass es sich dabei um Längen an einer rechtwinkligen Spirale handelt. Man kann jetzt fragen:



Wie lang sind diese ersten 5 Strecken <u>zusammen</u>?

Das wäre dann die Summe $s_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

Ausgerechnet: $s_5 = 2 + 3 + 5 + 8 + 12 = 30$.

Man kann diese Spirale verlängern.
Erkennst du das Bildungsgesetz der Folge?

$$2 \xrightarrow[+1]{} 3 \xrightarrow[+2]{} 5 \xrightarrow[+3]{} 8 \xrightarrow[+4]{} 12 \xrightarrow[+5]{} 17 \xrightarrow[+6]{} 23 \xrightarrow[+7]{} 30 \xrightarrow[+8]{} \ldots$$

Wie groß ist die Summe s_8 der ersten 8 Strecken?

$$s_8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5´ + a_6 + a_7 + a_8 = 100$$

Für die Folge der Teilsummen s_1, s_2, s_3 … kann man eine Formel aufstellen. Dies tun wir jetzt.

MERKE: **Eine Folge s_n von Teilsummen (= Partialsummen) nennt man eine <u>Reihe</u>.**

So sieht die **Folge der Teilsummen, also die zur Folge a_n gehörende Reihe** aus:

1. Teilsumme:	$s_1 = a_1$	$s_1 = 2$
2. Teilsumme:	$s_2 = a_1 + a_2$	$s_2 = 2 + 3 = 5$
3. Teilsumme:	$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$	$s_3 = 2 + 3 + 5 = 10$
4. Teilsumme:	$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$	$s_4 = 2 + 3 + 5 + 8 = 18$
	…	…
n-te Teilsumme:	$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$	$s_n = 2 + 3 + 5 + \ldots + a_n = ?$

Hier die dazu gehörenden Formeln in einer Übersicht:

Die **<u>rekursive Bildungsvorschrift</u>** der Folge a_n:

a_2 entsteht aus a_1 durch Addition der 1,
a_3 entsteht aus a_2 durch Addition der 2,
a_4 entsteht aus a_3 durch Addition der 3,
a_{n+1} entsteht aus a_n durch Addition der Zahl n.

Also: $\boxed{a_{n+1} = a_n + n}$

Hinweis: In 40011 Abschnitt 5.3 und in 40013 sind solche Folgen erklärt. Sie heißen arithmetische Folgen 2. Ordnung.

Ihre **<u>explizite Bildungsvorschrift</u>** lautet: $\boxed{a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 2}$

Und hier die **REKURSIVE BERECHUNGSMETHODE FÜR REIHEN**

Allgemein	Beispiel
$s_1 = a_1$	$s_1 = 2$
$s_2 = a_1 + a_2$	$s_2 = 2 + 3 = 5$
$s_3 = \underbrace{a_1 + a_2}_{=s_2} + a_3$	$s_3 = \underbrace{2+3}_{=s_2} + 5 = 10$
$s_4 = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{=s_3} + a_4$	$s_4 = \underbrace{2+3+5}_{=s_3} + 8 = 18$

Man kann also die jeweils nächste Teilsumme aus der vorangegangen berechnen, indem man einfach das nächste Glied der ursprünglichen Folge addiert.

Unter einer Reihe versteht man die Folge der Teilsummen einer Folge.
Diese Teilsummen beginnen stets beim Anfangsglied a_1 oder a_0:

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$ d. h. $s_2 = s_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$ d. h. $s_3 = s_2 + a_3$

. . . .

$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ d. h. $s_{n+1} = s_n + a_{a+1}$

Man kann damit auch beliebige Abschnitte der Reihe aufsummieren.
In jeder Teilsumme stecken frühere Teilsummen, deren Ergebnisse man verwenden kann:

$$s_{12} = \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_7}_{s_7} + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} \qquad (1)$$

Daraus folgt $s_{12} = s_7 + (a_8 + \ldots + a_{12})$

und erhalte daraus: $\boxed{a_8 + a_9 + \ldots + a_{12} = s_{12} - s_7} = 310 - 70 = 240$

Oder: $a_{14} + a_{15} + \ldots + a_{22} = s_{22} - s_{13}$ (vorausgesetzt man kennt schon s_{22} und s_{13})

Dazu braucht man die **explizite Bildungsvorschrift für die zugehörige Reihe**:

$\boxed{s_n = \frac{1}{6}n^3 + \frac{11}{6}n}$ (Ohne Begründung hier)

Wir testen sie: $s_7 = 2 + 3 + 5 + 8 + 12 + 17 + 23 = 70$

Die Formel liefert: $s_7 = \frac{1}{6} \cdot 7^3 + \frac{11}{6} \cdot 7 = 70$

Oder: $s_{12} = s_7 + 30 + 38 + 47 + 57 + 68 = 310$

Die Formel liefert: $s_{12} = \frac{1}{6} \cdot 12^3 + \frac{11}{6} \cdot 12 = \ldots = 310$

Damit klappt dies: $\boxed{a_{14} + a_{15} + \ldots + a_{20} = s_{20} - s_{13}} = \underbrace{\left[\frac{1}{6} \cdot 20^3 + \frac{11}{6} \cdot 20\right]}_{s_{20}} - \underbrace{\left[\frac{1}{6} \cdot 13^3 + \frac{11}{2} \cdot 13\right]}_{s_{13}} = 980$

Oder $a_{14} + a_{15} + \ldots + a_{22} = s_{22} - s_{13} = \left[\frac{1}{6} \cdot 22^3 + \frac{11}{6} \cdot 22\right] - \left[\frac{1}{6} \cdot 13^3 + \frac{11}{2} \cdot 13\right] = \ldots \text{(TR.)}$

2 ARITHMETISCHE REIHEN

2.1 Summenformel

Die zu einer arithmetischen Folge gehörende Folge der Teilsummen heißt eine arithmetische Reihe.

Beispiel 1: Spielerische Herleitung einer Formel

Die berühmteste arithmetische Reihe geht auf eine Geschichte des 9-jährigen Schülers Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) zurück. Dieser erhielt von seinem Schulleiter Büttner und seinem Assistent Bartels die Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Er schaffte dies in so kurzer Zeit, dass die beiden auf seine mathematische Begabung aufmerksam wurden. Er hatte nämlich erkannt, dass man nur 50-mal die Summe 101 rechnen musste:

$$s_{100} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$$

und umgekehrt:

$$s_{100} = 100 + 99 + 98 + \ldots + 2 + 1$$

vertikal addiert:

$$2s_{100} = 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101$$

So entstand die Gleichung $2s_{100} = 100 \cdot 101 \Rightarrow s_{100} = 50 \cdot 101 = 5050$

Als Formel sieht das dann so aus:

$$2 \cdot s_{100} = 100 \cdot (a_1 + a_{100}) \Rightarrow s_{100} = \frac{100}{2} \cdot (a_1 + a_{100})$$

Allgemein: $\boxed{2 \cdot s_n = n \cdot (a_1 + a_n) \Rightarrow s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)}$

Dieses Prinzip der Aufsummierung kann auf jede arithmetische Folge angewendet werden!

Beispiel 2: Eine andere arithmetische Reihe

Die Folge sei $a_n = 4n + 1$, also 5 ; 9 ; 13 ; 17 ; 21 ; ...

Das ist eine arithmetische Folge mit d = 4.

Wir wollen die ersten 30 Glieder dieser Folge addieren, d.h. s_{30} ist gesucht.

Dazu müssen wir laut Formel zuert $a_{30} = 4 \cdot 30 + 1 = 121$ berechnen.

Dann wird die Teilsumme s_{30} 2-mal gegenläufig aufschreiben und dann vertikal addiert:

$$s_{30} = 5 + 9 + 13 + \ldots + 113 + 117 + 121$$

$$s_{30} = 121 + 117 + 113 + \ldots + 13 + 9 + 5$$

$$2 \cdot s_{30} = 30 \cdot 126 \Rightarrow s_{30} = 15 \cdot 126 = 1890$$

Es folgt dann: $s_{30} = \frac{30}{2} \cdot (a_1 + a_{30}) = 15 \cdot (5 + 121) = 15 \cdot 126 = 1890$

Diese Summenformel gilt natürlich auch allgemein:

MERKE:

Für eine arithmetische Reihe gilt:

$$s_n = \tfrac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right) \qquad (1)$$

Beweis der Formel (1)

Ich wende dieselbe Methode an wie in den beiden Beispielen zuvor:

Man schreibt die Teilsumme s_n zweimal gegenläufig auf und addiert vertikal:

$$s_n = a_1 + a_2 \quad + a_3 \quad + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$s_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 \quad + a_2 \quad + a_1$$

$$2 \cdot s_n = \left(a_1 + a_n\right) + \left(a_2 + a_{n-1}\right) + \ldots + \left(a_{n-1} + a_2\right) + \left(a_n + a_1\right) \qquad (2)$$

Man sollte jetzt erkennen, dass alle n Summanden gleich groß sind:

$$a_1 + a_n = a_1 + (a_1 + \left(n-1\right)d) = 2a_1 + \left(n-1\right)d$$

$$a_2 + a_{n-1} = \left(a_1 + d\right) + \left(a_n - d\right) = a_1 + a_n$$

$$a_3 + a_{n-2} = \left(a_1 + 2d\right) + \left(a_n - 2d\right) = a_1 + a_n$$

Jedesmal ist diese Summe $= a_1 + a_n$.

Damit wird in Gleichung (2) rechts n mal derselbe Summand $(a_1 + a_n)$ addiert:

Zwischenergebnis: $2 \cdot s_n = n \cdot \left(a_1 + a_n\right) \Rightarrow s_n = \frac{n}{2} \cdot \left(a_1 + a_n\right)$ (1)

Diese Formel kann man ausführlicher gestalten:

Ersetzt man a_n in (1) durch $a_n = a_1 + \left(n-1\right) \cdot d$

folgt:

$$s_n = \tfrac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right) = \tfrac{n}{2}\left(2a_1 + \left(n-1\right)d\right) = na_1 + \tfrac{1}{2}n\left(n-1\right)d$$

$$s_n = na_1 + \tfrac{1}{2}n^2 d - \tfrac{1}{2}dn$$

$$s_n = \tfrac{1}{2}d \cdot n^2 + (a_1 - \tfrac{1}{2}d) \cdot n \quad (3)$$

Diese Formel merkt sich niemand.

Es ist günstiger, sich zuerst a_n zu berechnen und dann mit (1) die Summe s_n.

Man kann sich jedoch merken, dass die

Summenformel für eine arithmetische Folge ein quadratischer Term ohne Absolutglied

ist.

2.2 Musteraufgaben zur arithmetischen Reihe

TRAINING

Beispiel 1

Gegeben ist die arithmetische Folge $\boxed{a_n = 3n + 4}$.

a) Berechne die ersten 5 Glieder dieser Folge und die zugehörigen 5 Teilsummen.

b) Wie lautet die Formel für die Teilsummen dieser Folge (s_n = ...) ?

c) Berechne die Partialsumme s_{100}.

Lösung:

a) Die arithmetische Folge lautet $a_n = 3n + 4$. Die konstante Differenz ist also d = 3.

Folge:	Teilsummen:
$a_1 = 3 \cdot 1 + 4 = 7$	$s_1 = a_1 = 7$
$a_2 = 7 + 3 = 10$	$s_2 = s_1 + a_2 = 7 + 10 = 17$
$a_3 = 10 + 3 = 13$	$s_3 = s_2 + a_3 = 17 + 13 = 30$
$a_4 = 13 + 3 = 16$	$s_4 = s_3 + a_4 = 30 + 16 = 46$
$a_5 = 16 + 3 = 19$	$s_5 = s_4 + a_5 = 46 + 19 = 65$

Oder ganz ausführlich:

$$s_2 = a_1 + a_2 = 7 + 10 = 17$$

$$s_3 = \underbrace{a_1 + a_2}_{s_2} + a_3 = \underbrace{7 + 10}_{s_2} + 13 = 17 + 13 = 30$$

$$s_4 = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{s_3} + a_4 = \underbrace{7 + 10 + 13}_{s_3} + 16 = 30 + 16 = 46$$

$$s_5 = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}_{s_4} + a_5 = 46 + 19 = 65$$

b) Formel für die Teilsummen:

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)} = \frac{n}{2} \cdot (7 + 3n + 4) = \frac{n}{2} \cdot (3n + 11) = \boxed{\frac{3}{2} n^2 + \frac{11}{2} \cdot n}$$

Man hätte also auch mit dieser Formel die 5 Teilsummen berechnen können:

$$s_1 = \frac{3}{2} \cdot 1^2 + \frac{11}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} + \frac{11}{2} = \frac{14}{2} = 7 \qquad (= a_1)$$

$$s_2 = \frac{3}{2} \cdot 2^2 + \frac{11}{2} \cdot 2 = 6 + 11 = 17 \quad (= a_1 + a_2)$$

$$s_3 = \frac{3}{2} \cdot 3^2 + \frac{11}{2} \cdot 3 = \frac{27}{2} + \frac{33}{2} = \frac{60}{2} = 30 \qquad (= a_1 + a_2 + a_3) \quad \text{usw.}$$

c) $$s_{100} = \frac{3}{2} \cdot 100^2 + \frac{11}{2} \cdot 100 = \frac{30000 + 1100}{2} = \frac{31100}{2} = 15550$$

3 Geometrische Reihen

3.1 Grundlagen

Eine geometrische Folge liegt dann vor, wenn der Nachfolger immer durch Multiplikation mit demselben Faktor q entsteht: $a_{n+1} = a_n \cdot q$

Statt dessen kann man auch sagen, wenn der Quotient q aufeinander folgender Glieder konstant ist: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

Beispiel: Bei einer geometrische Folge sei $a_1 = 16$ und $q = \frac{1}{2}$.

Dann können wir die Folge und die Reihe (Folge der Teilsummen) aufschreiben:

$a_1 = 16$	$s_1 = a_1 = 16$
$a_2 = 16 \boxed{\cdot\frac{1}{2}} = 8$	$s_2 = a_1 + a_2 = 16 + 8 = 24$
$a_3 = 8 \boxed{\cdot\frac{1}{2}} = 4$	$s_3 = \underbrace{a_1 + a_2}_{s_2} + a_3 = \underbrace{16+8}_{=24} + 4 = 28$
$a_4 = 4 \boxed{\cdot\frac{1}{2}} = 2$	$s_4 = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{s_3} + a_4 = 28 + 2 = 30$
$a_5 = 2 \boxed{\cdot\frac{1}{2}} = 1$	$s_5 = s_4 + a_5 = 30 + 1 = 31$
$a_6 = 1 \boxed{\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$	$s_6 = s_5 + a_6 = 31 + \frac{1}{2} = 31{,}5$
$a_7 = \frac{1}{2} \boxed{\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$	$s_7 = s_6 + a_7 = 31{,}5 + \frac{1}{4} = 31{,}75$

usw.

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln über geometrische Folgen und Reihen

Geometrische Folge:
Rekursive Bildungsvorschrift: $a_{n+1} = a_n \cdot q$
Explizite Bildungsvorschrift: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Geometrische Reihe:
Rekursive Bildungsvorschrift: $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$
Explizite Bildungsvorschrift: $s_n = a_1 \cdot \underbrace{\frac{1-q^n}{1-q}}_{\text{falls } q<1} = a_1 \cdot \underbrace{\frac{q^n-1}{q-1}}_{\text{falls } q>1}$

Für unser **Beispiel** mit $a_1 = 16$ und $q = \frac{1}{2}$ sehen diese Formeln so aus:

<u>Folge explizit:</u> $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2^{5-n}$

<u>Reihe explizit:</u> $s_n = 16 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 16 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 32 \cdot \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

z. B. für n = 6: $s_6 = 16 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{1}{2}} = 32 \cdot \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right) = 32 \cdot \left(1-\frac{1}{64}\right) = 32 \cdot \frac{63}{64} = 31{,}5$ (siehe oben).

oder für n = 20: $s_{20} = 16 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{1-\frac{1}{2}} = 32 \cdot \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right] = 32 - 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \approx 31{,}999\,969$

3.2 Beweis der expliziten Reihenformel (Theorieseite)

Für eine geometrische Folge mit der Berechnungsvorschrift $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ schreibt man die Partialsumme s_n ausführlich auf. Darunter dann die q-fache Summe, die man dann subtrahiert:

$$s_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1q^{n-1} \qquad (1)$$

$$q\,s_n = \qquad a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1q^{n-1} + a_1q^n \qquad (2)$$

(1) – (2): Dann fallen alle untereinander stehenden Summanden der rechten Seite weg.

Übrig bleibt: $s_n - q \cdot s_n = a_1 - a_1 \cdot q^n$

Nun klammert man links und rechts aus und erhält:

$$s_n \cdot (1-q) = a_1 \cdot (1-q^n)$$

Daraus folgt: $\boxed{s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}}$ (3)

Erweitert man den Bruch mit (-1), dann ändern sich in Zähler und Nenner alle Vorzeichen:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{-1+q^n}{-1+q}$$

Was man besser so schreibt: $\boxed{s_n = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}}$ (4)

Zusatz: ***Manchmal beginnt eine Reihe schon mit a_O und sieht dann so aus:***

$$s_n = a_O + a_Oq + a_Oq^2 + a_Oq^3 + \ldots + a_O q^{n-2} + a_Oq^{n-1} \qquad (1')$$

Auch das sind n Summanden, wie man am Exponenten von q erkennt.

Doch wie sieht jetzt die Summenformel aus?

Ich gehe vor wie oben:

$$q\,s_n = a_Oq + a_Oq^2 + a_Oq^3 + \ldots + a_O q^{n-2} + a_Oq^{n-1} + a_Oq^n \qquad (2')$$

Und rechne (1') – (2'): Dann bleibt übrig:

$$s_n - q \cdot s_n = a_0 - a_0 \cdot q^n$$

bzw. $\boxed{s_n = a_0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}}$ (3')

Erweitert man den Bruch mit (-1), dann ändern sich in Zähler und Nenner alle Vorzeichen:

$$s_n = a_0 \cdot \frac{-1+q^n}{-1+q}$$

Was man besser so schreibt: $\boxed{s_n = a_0 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}}$ (4')

Es ändert sich also nichts, außer dass das Anfangsglied anders heißt.

Bemerkungen:

a) *Die erste Summenformel (3) eignet sich für $q < 1$ (also auch für negatives q), die zweite Formel (4) dagegen für $q > 1$.*

b) Für $q = 1$ benötigt man die Formeln nicht, denn eine geometrische Folge mit $q = 1$ ist konstant: 2, 2, 2, 2, …. usw.
Will man davon s_{20} bilden, rechnet man eben $s_{20} = 20 \cdot 2 = 40$
Außerdem könnte man $q = 1$ gar nicht einsetzen, weil sonst der Nenner 0 würde.

c) $q = 0$ kommt nie vor, denn ab a_2 wären alle Glieder der Folge 0, auf diese Folge verzichtet man.

4 Schwere Aufgaben zu Folgen und Reihen

Aufgabe 1

Eine monoton wachsende arithmetische Zahlenfolge (a_n) und eine geometrische Zahlenfolge (b_n) stimmen im 1. und 3. Glied überein, wobei gilt: $a_1 = b_1 = 2$.
Die 3. Partialsumme der arithmetischen Folge ist um 4 größer als die 3. Partialsumme der geometrischen Folge.
Gib für beide Folgen die ersten 4 Glieder sowie die explizite Bildungsvorschrift an.

Aufgabe 2

Eine arithmetische und eine geometrische Zahlenfolgen haben dasselbe Anfangsglied 128.
Das 9. Glied der arithmetischen Folge ist gleich dem 3. Glied der geometrischen Folge.
Die 5. Partialsumme der arithmetischen Folge ist um 220 größer als die Summe der ersten vier Glieder der geometrischen Folge.

a) Bestimme jeweils die ersten 6 Glieder der Folgen.

b) Gib jeweils eine rekursive und eine explizite Bildungsvorschrift an.

Aufgabe 3

Die Summe des dritten und fünften Gliedes einer alternierenden, divergenten, geometrischen Zahlenfolge ist 225, das Produkt derselben Glieder ist 4556,25.
Ermittle a_1, q und das vierte Glied der Folge sowie die explizite Berechnungsformel.

Aufgabe 4

Von einer arithmetischen Folge (a_n) ist $a_1 = 3$ und $a_5 = 9$ bekannt. Eine geometrische Folge (b_n) hat dasselbe Anfangsglied wie die arithmetische Folge.
Die 2. Partialsumme der geometrischen Folge ist um 0,5 kleiner als das 2. Glied der arithmetischen Folge.
Gib für beide Folgen die ersten 5 Glieder sowie die explizite Bildungsvorschrift an.

Aufgabe 5

Von einer Partialsummenfolge (Reihe) kennt man $s_1 = 1\frac{1}{4}$, $s_2 = 1\frac{3}{4}$, $s_3 = 1\frac{1}{2}$, $s_4 = \frac{1}{2}$.

a) Bestimme die zugehörige Folgenglieder a_1 bis a_5 und gibt eine explizite Bildungsvorschrift für die Folge (a_n) und für die Reihe (s_n) an.

b) Es ist $s_n = -310$. Bestimme die Anzahl der Summanden.